

Wavelets *-teori och tillämpningar*

Sammanfattning:

Ett teoretiskt projektarbete som tar upp grunderna inom waveletanalysen. Syftet är att ge en övergripande bild av vad wavelets är, hur de uppkommit och dess tillämpningar. Rapporten innefattar jämförelser mellan wavelettransformen och andra liknande metoder, samt diskussion om dess fördelar. Även den mest grundläggande matematiken inom området tas upp.

Behandlade tillämpningsområden är bildkompression och brusreducering.

Arbetet har delats upp mellan projektmedlemmarna och rapporten har sedan sammanställts gemensamt. Projektet har givit projektmedlemmarna en djupare förståelse av waveletanalysens roll inom signalbehandlingen.

Innehåll:

1	Formalia	3
1.1	Uppgift	3
1.2	Begränsningar.....	3
1.3	Metod	3
1.4	Disposition	3
2	En introduktion till wavelets	4
2.1	Bakgrund	4
2.2	Översikt:.....	4
2.3	Teori:	5
2.3.1	Fouriertransformen:.....	5
2.3.2	Hur fungerar wavelets?:	6
2.3.3	Likheter med Fouriertransformen:	7
2.3.4	Olikheter mellan Fourier- och wavelettransformen:	7
2.3.5	Olika typer av wavelets:.....	8
2.3.6	Waveletanalys:	8
3	Tillämpningar.....	11
3.1	Allmänt om olika tillämpningar	11
3.2	Brusreducering	11
4	Bildkompression.....	13
4.1	Inledning, digitala bilder	13
4.2	Hur representeras bilder digitalt?	13
4.3	Hur kan bilder komprimeras?.....	13
4.3.1	DWT och kvantisering i detalj	14
4.4	Kort om Huffmankodning.....	15
4.5	Varför använda wavelettransformering?	16
4.5.1	Närmare ett mänskligt öga	16
4.5.2	Slippa block i komprimerade bilder	16
4.6	Exempel.....	17
5	Referenser.....	18
5.1	I texten använda referenser	18
5.2	Övriga referenser	18

1 Formalia

1.1 Uppgift

Syftet med detta arbete är att undersöka wavelets och tillämpningar av dessa ur ett teoretiskt perspektiv.

1.2 Begränsningar

Vi har valt att försöka undvika matematiska detaljer i den mån det har varit möjligt. I de avsnitt där det ändå krävts har vi försökt att ge en övergripande förståelse.

Vi har begränsat oss till att redogöra för två tillämpningar närmare. De andra tillämpningarna har vi bara behandlat översiktligt då materialet om dessa varit begränsat. Vi hade dessutom tänkt att utöka arbetet med någon waveletrelaterad beräkning i Matlab, men efter att ha börjat jobba med detta insåg vi att det skulle bli ett projekt i sig. Det hela då skulle bli väldigt omfattande för att överhuvudtaget ge något resultat. Då syftet med arbetet var att behandla wavelets teoretiskt, valde vi att utesluta Matlabdelen. Vi har valt att i vår rapport utesluta slutsatsen då vi inte fann denna nödvändig.

1.3 Metod

För att sätta oss in i vad Wavelets egentligen är, hur de fungerar och vad de används till, utfördes en litteraturstudie. Litteraturen baserades på texter från Internet och ett antal böcker i ämnet. Det praktiska arbetet bestod i att försöka implementera några utvalda metoder i Matlab och att utvärdera resultatet.

1.4 Disposition

Kapitel två ger en introduktion till teorin bakom wavelets. Kapitel tre handlar om tillämpningar i generella ordalag samt brusreducering. Kapitel fyra går djupare in på bildkompression med wavelets.

2 En introduktion till wavelets

2.1 Bakgrund

Historien om wavelets börjar med historien om Fourieranalysen. Fourier visade att så gott som alla periodiska funktioner kan uttryckas som summan av cosinus- och/eller sinusfunktioner. Även vissa icke-periodiska funktioner kan behandlas på samma sätt genom att använda Fouriertransformen. Det som störde forskarna var att Fourieranalysen arbetar med linjära problem. Icke-linjära problem är ofta mer komplicerade och uppförandet hos ett icke-linjärt system är inte lika förutsägbart, en liten förändring i insignalen kan leda till en mycket stor förändring i utsignalen. Även det faktum att Fourieranalysen "gömmar" informationen om tiden, gjorde att många vetenskapsmän började söka efter en bättre metod. Wavelets fick betydelse när man insåg att FFT-beräkningar (mer om detta senare), under vissa förutsättningar, inte gav önskad information om signalerna.

Grundidén bakom wavelets är inte ny, den fanns redan på 1910-talet, men som många andra beräkningsalgoritmer, kom den inte till så stor användning förrän datorn introducerades och kunde utföra beräkningarna. Man kan egentligen säga att det riktiga intresset för wavelets inte väcktes förrän i början på 80-talet. 1985 konstruerade Y. Meyer den första icke-triviala waveleten, denna var kontinuerligt differentierbar men uppfyllde inte kravet på kompakt stöd (mer om detta senare).

Innan detta skedde var wavelets till stor del ett teoretiskt matematiskt arbete där i första hand matematiker, och inte tekniker med intresse för signalbehandling, var inblandade. Detta har fått till effekt att mycket av litteraturen om wavelets har skrivits av matematiker. De har då använt sig av ett språkbruk och ett sätt att bearbeta matematiska operationer vilket skiljer sig från vad som är vanligt i signalbehandlingssammanhang. Detta gör litteraturen ganska svår genomtränglig för en som inte är matematiker till professionen.

2.2 Översikt

Wavelets är en form av databehandling där man delar upp en signal i ett antal frekvensband för att sedan behandla de olika banden var för sig. Man kan därmed använda störst noggrannhet vid behandling av de frekvensband som man bedömer som mest relevanta. Namnet wavelet (sv. krusning) kommer från kravet på att de ska integrera mot noll, de ska "pendla" över och under x-axeln.

Waveletfunktioner är funktioner som uppfyller specifika matematiska villkor. Metoden påminner mycket om den som används vid Fourieranalys, där cosinus- och sinusfunktioner används för att representera andra funktioner. Det speciella med wavelet-algoritmer är att de bearbetar data med olika upplösningar eller skalor, där en mindre skala innebär att man går in på mindre detaljer i informationen. Om vi beskriver en signal med frekvens innebär detta att man går mot en kortare våglängd, d.v.s. en högre frekvens, och beskriver vi en bild så innebär en mindre skala att man går mot större upplösning i bilden, d.v.s. mot mindre bildpunkter. Wavelets fungerar som ett mikroskop där man kan observera olika delar av signalen genom att anpassa fokuset. De kan även användas för att få en bra helhetsbild av en signal. Målet är att överföra informationen från en signal till tal, koefficienter, som kan bearbetas, sparas, överföras, analyseras eller användas för att återskapa den ursprungliga signalen.

Det finns många olika typer av wavelets några exempel är ”mjuka” wavelets, wavelets med enkla matematiska uttryck och wavelets med enkla associerade filter. Den enklaste av alla wavelets är the Haar wavelet.

På samma sätt som cosinus och sinus används inom Fourier-analysen, används här wavelets som basfunktioner för att representera data eller andra funktioner. Inom wavelet-analysen utgår man från en specifik wavelet, ofta kallad mother wavelet. Utifrån denna kan man sedan på olika sätt analysera en signal. Genom att dra ihop, dra ut och förflytta mother funktionen skapas en mängd waveletfunktioner. För tidsanalys används en ihopdragen högfrekvent version av mother wavelet och för frekvensanalys används en utvidgad lågfrekvent version av samma wavelet.

Enligt vissa forskare ger wavelets ett helt nytt perspektiv och tankesätt när det gäller att bearbeta data. Man har länge velat ha en metod som på ett bättre sätt, än den traditionella Fouriermetoden, approximerar ojämna signaler. Det finns en del viktiga egenskaper hos wavelets som gör att wavelet-analysen skiljer sig från Fouriermetoden. Basfunktionerna inom Fourieranalysen (cosinus och sinus) är lokaliserade i frekvensdomän men inte i tidsdomän. Små ändringar i frekvensen ger i Fouriertransformen upphov till ändringar var som helst i tidsdomänen. Wavelets däremot är lokaliserade både i frekvensdomän och i tidsdomän, genom bearbetning av mother wavelet. Detta är till stor användning i många situationer. En annan fördel är att wavelets kan representera många olika typer av funktioner på ett kompakt sätt. T.ex. kräver funktioner med diskontinuiteter och funktioner med skarpa spikar, betydligt färre wavelet-basfunktioner än sinus- cosinusfunktioner, för att uppnå jämförbar approximation.¹ Detta genom att basfunktionerna, till skillnad från sinus och cosinus, sträcker sig över en ändlig tidsdomän och har därmed större möjlighet att upptäcka spikar och diskontinuiteter. Wavelets erbjuder därmed ett mycket sparsamt sätt att representera data och blir därför en utmärkt metod för datakomprimering. Som vi senare tar upp, använder sig t.ex. FBI av wavelets för digital fingeravtryckskompression.

Wavelets är även mycket användbart vid bearbetning av statistiskt material. En stor och utspridd datamängd kan enkelt och snabbt transformeras med hjälp av den diskreta wavelettransformen. Uttrycket snabb (fast) hos Fouriertransformen kan i de flesta fall ersättas med snabbare (faster) för wavelets. För Fouriertransformering gäller hastigheten $O(n \times \log_2(n))$. För snabba wavelets gäller $O(cn)$ där c beror på komplexiteten hos aktuell wavelet.²

2.3 Teori

2.3.1 Fouriertransformen

Wavelets och Fourieranalysen hör helt klart till samma familj inom matematiken. Även om de skiljer sig från varandra på många sätt så är grunden densamma. Man kan säga att wavelets är en utvidgning av den traditionella Fourieranalysen. För att underlätta förståelsen har vi därför valt att ge en beskrivning av Fourieranalysen innan vi ger oss in på wavelets.

Fouriertransformen har förmågan att kunna analysera en signal i tidsdomänen med hänsyn till dess frekvensinnehåll. Transformen översätter en funktion i tidsdomän till en funktion i frekvensdomän. Signalen kan sedan analyseras med hänsyn till dess frekvensinnehåll eftersom Fourierkoefficienterna hos den transformerade signalen representerar bidraget från

¹ “Wavelets for Kids”, Brani Vidakovic och Peter Mueller

² “The world According to Wavelets”, Barbara Burke Hubbard second edition 1998

varje sinus- och cosinusfunktion vid varje frekvens. Den diskreta Fouriertransformen (DFT) uppskattar Fouriertransformen för en funktion med ett ändligt antal samplingspunkter.

Om $f(t)$ inte är periodisk går det inte att representera signalen korrekt med hjälp av summering av periodiska funktioner. Detta kan lösas med hjälp av en WFT (windowed Fourier transform). En WFT kan användas för att ge information om signaler i tidsdomän samtidigt som i frekvensdomän. Med WFT:n delas insignalen upp i delar och varje del analyseras separat. Syftet med WFT:n är att lokalisera signalen i tidsdomän.

För att approximera en funktion genom samplingar krävs en matris med en ordning som är lika med antalet samplingspunkter. Eftersom multiplikation mellan en $n \times n$ matris och en vektor kostar n^2 aritmetiska operationer, blir problemet lätt stort när antalet samplingar ökar. Om samplingarna däremot är uniformt fördelade kan matrisen faktoriseras till en produkt av endast några få små matriser. Dessa kan sedan appliceras på en vektor med endast ordning $n \cdot \log(n)$ operationer. Det är det här man kallar den snabba (fast) Fouriertransformen (FFT)³.

2.3.2 Hur fungerar wavelets?

Grunden för wavelets är att de använder sig av olika klasser av basfunktioner som är definierade i en ändlig tidsdomän. Basfunktioner är funktioner som kan användas för att konstruera en annan funktion. Adderar man cosinus och sinus genom en kombination av frekvenser och amplituder kan man t.ex. konstruera en ton. Här är cosinus och sinus basfunktioner, som vi tidigare nämnt är det de basfunktioner som används inom Fourieranalysen. Det är viktigt att komma ihåg att wavelettransformen har ett oändligt antal möjliga basfunktioner, inte enbart en speciell typ.

För att analysera en signal använder sig waveletmetoden, som vi tidigare nämnt, av skalanalys, d.v.s. signalen delas upp i ett antal frekvensband. Detta innebär att analysera $f(x)$ genom att skapa matematiska strukturer som varierar i skala. En funktion konstrueras, den skiftas med en viss mängd och dess skala ändras. Denna struktur appliceras på $f(x)$ för att approximera signalen. Proceduren upprepas ett flertal gånger för att få en bra approximation. Metoden är inte känslig för brus eftersom den mäter medelvärdet av variationerna i signalen med olika skalor⁴.

Att förstå sig på skal-varierande basfunktioner är grunden till att förstå wavelets.

En basfunktion varierar i skala genom att dela upp en funktion eller ett datasegment med hjälp av olika skalstorlekar. Man startar uppdelningen genom att dela det aktuella signalområdet, som för att inte bryta mot samplingsvillkoret sträcker sig upp till frekvensen $f_s/2$, mitt i tu. Vi delar alltså upp området $0 - f_s/2$ i två lika stora delar med hjälp av ett lågpasfilter med passbandet $0 - f_s/4$ och ett högpasfilter med passbandet $f_s/4 - f_s/2$. I realiteten beter sig högpasfiltret som ett bandpassfilter eftersom signalbandet slutar vid $f_s/2$. I matematikernas terminologi kallas lågpasfiltret för skalningsfunktion och högpasfiltret för waveletfunktion. Eftersom vi nu har bandbredden $f_s/4$ och banden ligger separerade inom intervallen $0 - f_s/4$ och $f_s/4 - f_s/2$, så kan vi, utan att skada signalerna, halvera (decimera) samplingsfrekvensen i de två kanalerna. Lägg märke till att vi till en början hade en signal innehållande N stycken sampel. Nu har vi delat upp den och fått två signaler med $N/2$ sampel vardera, d.v.s. vi har totalt N sampel och den ursprungliga datamängden har inte förändrats. Om vi tillfälligt

³ Amara Graps "An introduction to wavelets" IEEE Computer Society 1995

⁴ Amara Graps "An introduction to wavelets" IEEE Computer Society 1995

stannar vid denna första nivå, analyserar eller signalbehandlar vi de två frekvensbanden var för sig. Detta sker alltså vid en lägre (halverad i detta fall) samplingsfrekvens, vilket förenklar analysen. Om vi inte bara ska analysera signalen utan även återställa den så får vi återgå till den ursprungliga samplingsfrekvensen i de två banden. Vilket betyder att vi fördubblar samplingsfrekvensen i det här fallet, och sedan åter använder ett lågpasfilter med passbandet $0 - f_s/4$ och ett högpasfilter med passbandet $f_s/4 - f_s/2$. Detta för att filtrera bort de speglingssignaler som uppsamlingen oundvikligen ger upphov till.

En fortsatt uppdelning kan göras efter det första steget för att få ännu mindre datamängder att analysera. När varje delsignal endast består av två sampel har vi nått gränsen för hur långt vi kan gå. För att kunna komma så långt krävs att vi från början har $N=2^n$ sampel, samma förutsättning krävs vid FFT-beräkningar.

2.3.3 Likheter med Fouriertransformen

FFT:n och den diskreta wavelettransformen (DWT) är båda linjära operationer som genererar en datastruktur som innehåller $\log_2(n)$ segment av varierande längd, och vanligtvis transformerar den till en datavektor av längd 2^n .

Även de matematiska egenskaperna hos matriserna i de båda fallen är lika. Den inversa matrisen är, både för FFT:n och för DWT:n, originalet fast omvänt (transponerat). Det leder till att båda transformerna kan ses som en rotation i funktionsrymden till en annan domän. Hos FFT:n innehåller denna domän basfunktioner som representeras av cosinus och sinus. Domänen för DWT:n innehåller däremot mer komplicerade basfunktioner, wavelets eller analyserande wavelets.

2.3.4 Olikheter mellan Fourier- och wavelettransformen

Den främsta skillnaden mellan Fourier- och wavelettransformen är att varje waveletfunktion är lokaliserad i en tidsrymd, sinus och cosinus hos Fourier är det inte. Denna fördel tillsammans med att wavelets även är lokaliserade i frekvens, gör att transformeringen, till waveletdomän, av många funktioner och operationer blir väldigt snål.

För att förstå tid-frekvens förhållandet mellan Fourier- och wavelettransformen kan man titta hur basfunktionerna beter sig i tid-frekvensplanet. Figur 1 visar en WFT, där fönstret är en fyrkantsvåg. Fönstret hugger av sinus- eller cosinusvågen för att passa in i en speciell fönsterbredd. Eftersom ett enda fönster används för alla frekvenser, i det här fallet, blir upplösningen densamma överallt i tid-frekvensplanet.

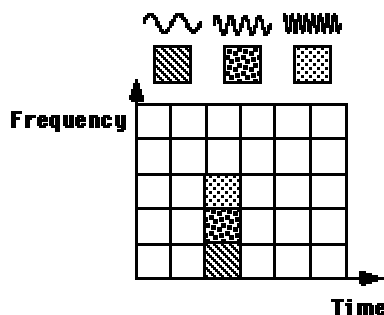


Fig.1 En WFT med fyrkantsvåg som fönster⁵

⁵ Amara Graps "An introduction to wavelets" IEEE Computer Society 1995

En stor fördel med wavelettransformen är att dess fönster varierar. För att möjliggöra isolering av diskontinuiteter, behövs några väldigt korta basfunktioner. Samtidigt, för att få detaljerad frekvensanalys, krävs väldigt långa basfunktioner. För att åstadkomma detta använder man högfrekventa korta basfunktioner och lågfrekventa långa basfunktioner. Det är precis det man gör när man använder wavelettransformen. Fig.2 visar beteendet i tid-frekvensplanet hos en waveletfunktion, Daubeiches wavelet. Här är inte upplösningen den samma i tid-frekvensplanet. Den varierar med hänsyn till de olika fönster som används.

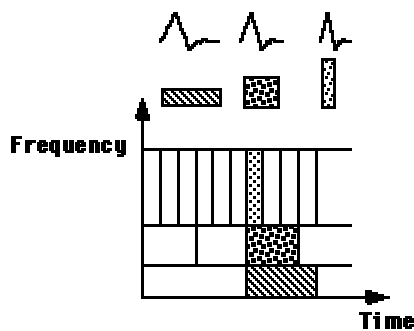
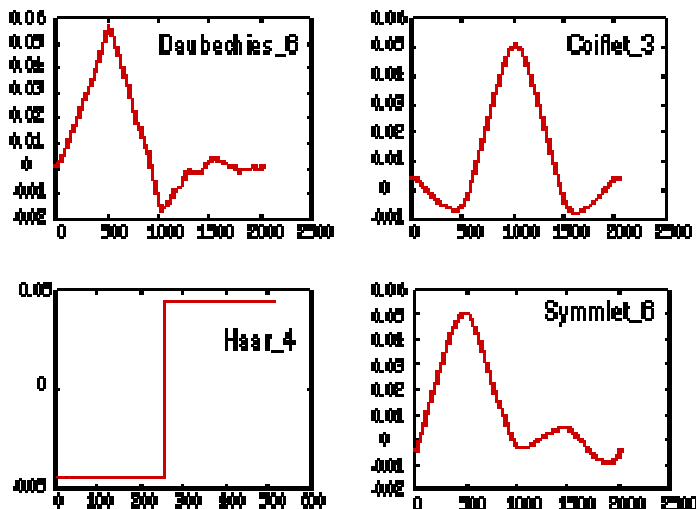


Fig.2 Daubeiches wavelet i tid-frekvensplanet

2.3.5 Olika typer av wavelets

De olika waveletfamiljerna gör olika avvägningar mellan hur kompakt basfunktionerna är lokaliserade i tidsrymden och hur "mjuka" de är. Inom varje familj av wavelets bestäms undergrupper av wavelets genom antalet koefficienter och iterationens nivå. Hur wavelets delas in i olika klasser bestäms av ett flertal matematiska förhållanden som måste vara uppfyllda och som är direkt relaterade till antalet koefficienter. Fig. 3 illustrerar ett några olika wavelets.



2.3.6 Waveletanalys

För att få ett grepp om wavelets krävs en del matematik. Vi har därför valt att i detta avsnitt ge en övergripande förståelse för de grundläggande matematiska beräkningar som krävs vid

diskret waveletanalys. För mer detaljerad teori och teorin kring de beräkningar som görs i det kontinuerliga fallet hänvisar vi till referenslitteraturen.

Som vi tidigare nämnt utgår all waveletanalys från en motherwavelet. Det är denna som bearbetas för att finna lämpliga waveletfunktioner för ett givet problem.

Genom utvidgning och tolkning av en motherwavelet definieras en ortogonal bas, en waveletbas:

$$\Phi_{(s, l)}(x) = 2^{-s/2} \Phi(2^{-s}x - l)$$

s, l : heltal som skalar och utvidgar motherfunktion Φ för att generera wavelets.

s : skalindex som anger längden av en wavelet.

l : lägesindex som anger en wavelets position.

Känner man till allt om sin motherfunktion vet man allt om basfunktionerna. Detta eftersom baserna är en utvidgning av motherfunktion. För att uppskatta den aktuella datamängden vid olika upplösningar används motherfunktionen i en skalekvation:

$$W(x) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{c_{k+1}} \Phi(2x + k)$$

$W(x)$: skalfunktion för motherfunktionen Φ

c_k : wavelet-koefficienter

Koefficienterna måste uppfylla linjära och kvadratiska krav, nämligen:

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k = 2 \quad , \quad \sum_{k=0}^{N-1} c_k c_{k+2l} = 2 \delta_{l,0}$$

δ : deltafunktionen

l : positionsindex

Koefficienterna har en avgörande betydelse för analysen. De är dessa som i slutändan helt representerar en given datamängd.

En av de viktigaste fördelarna med wavelets är det enkla sätt på vilket forskare kan välja de styrande koefficienterna för ett givet waveletsystem, som lämpar sig för ett specifikt problem.

Det underlättar förståelsen om man ser koefficienterna $\{c_0, \dots, c_n\}$ som ett filter. Filtret (eller koefficienterna) placeras i en transformeringsmatris, som appliceras på en obehandlad datavektor. Detta görs efter en hierarkisk algoritm, en pyramid algoritm, som upprepade gånger "jämnar till" vektorn och som till slut innehåller dels "mjuka" komponenter och dels alla detaljrika komponenter. Koefficienterna använder två dominerande modeller, en som fungerar som ett "mjukgörande filter" och en som plockar ut detaljerad information från datat⁶.

⁶ Amara Graps "An introduction to wavelets" IEEE Computer Society 1995

DWT-matrisen är till en början inte så sparsam som vi tidigare hävdade. Den måste bearbetas på samma sätt som man gör med FFT:n. Man faktorerar alltså upp DWT:n i en produkt av några få sparsamma matriser. Resultatet blir en algoritm som endast har ordning n operationer för att transformera en n -samplingsvektor. Detta kallas ibland för den ”snabba” DWT:n.

Eftersom det finns oändligt många basfunktioner att välja bland så måste man veta vilka man ska välja. Det krävs alltså en metod för att finna den bästa basfunktionen för en given signal, för att uppnå optimalt resultat. Den valda basfunktionen ska innehålla väsentlig information om signalen. Om få termer behövs vid expansionen (av motherwavelet) för att representera signalen, har signalen komprimerats. Få termer gör basrepresentationen effektiv.

Enligt Wickerhauser ska följande egenskaper, hos basfunktionen, vara uppfyllda⁷:

- Snabb beräkning av inre produkter med andra basfunktioner.
- Snabb superposition av basfunktionerna.
- Bra lokalisering, så att man kan identifiera positionen hos en signal som bidrar med en avgörande komponent.
- Bra lokalisering i frekvensdomänen, så att man kan identifiera svängningar hos en signal.
- Oberoende, så att inte för många basfunktioner matchar samma del av en signal.

Vid denna typ av analys av wavelets söker man en bas i vilken koefficienterna, när de omplaceras i sjunkande ordning, avtar så fort som möjligt. För att mäta detta används ett flertal redan kända verktyg, t.ex. från den klassiska harmoniska analysen.

⁷ Amara Graps ”An introduction to wavelets” IEEE Computer Society 1995

3 Tillämpningar

3.1 Allmänt om olika tillämpningar

Wavelets har med framgång tillämpats inom ett stort antal områden, allt från astronomi, akustik, musik, optik och seismologi, till neurofysik, farkostteknik och ren matematik. Wavelets kan även appliceras inom områden som ekonomi, statistik, kommunikationsteori och datorgrafik.

Framförallt är det inom signalanalysens olika delområden som wavelets används, och då främst för signalkompression, signalreduktion, spektral- och tid/frekvensanalys. Med hjälp av wavelets kan man få en betydligt bättre bild av signalerna än vad en DFT- eller FFT-beräkning skulle ha gett. Inom tal- och ljudbehandling betyder detta talkompression, talrekonstruktion, och röstigenkänning. När det gäller bildanalys, som vi kommer gå in mer på senare, används tillämpningar inom bildkompression, bildrekonstruktion och mönsterigenkänning. Man kan lätt se ett mönster som går igen inom alla dessa delområden; wavelets är bra att använda vid kompression och rekonstruktion av signaler eller data. Med hjälp av wavelets kan man reducera nödvändig mängd data som måste lagras eller sändas över en kanal.

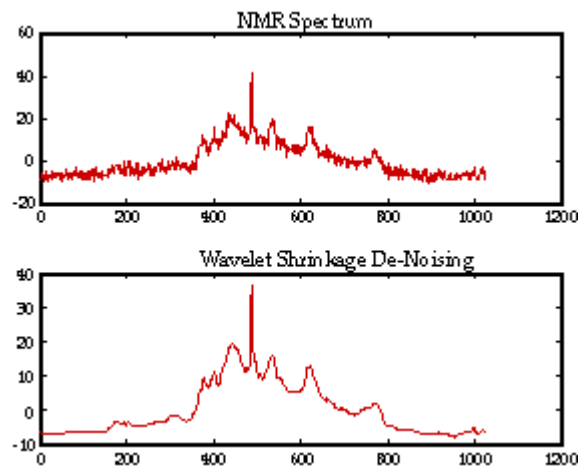
3.2 Brusreducering

Målet med signalanalys är att utläsa relevant information från en signal. Problemet är hur man skall få tillbaka den riktiga signalen när den störts av brus i systemet. Brusreducering är ett annat stort tillämpningsområde för wavelets. Man kan lösa problemet med förvrängda signaler genom en teknik som på engelska kallas "wavelet shrinkage and thresholding methods"⁸. Tekniken skulle på svenska kunna översättas till "krympnings- och tröskelvärdesmetoder" och betyder att man genom wavelettransformation bryter sönder en mängd data och översätter de ursprungliga värdena till medelvärden och avvikelser (dvs. detaljerna) från dessa medelvärden. Vissa av de resulterande waveletkoefficienterna motsvarar detaljerna i datamängden, och om detaljerna är små, kan de utelämnas utan att avsevärt påverka huvuddragen i datamängden. Idén med ett tröskelvärde här är att sätta alla koefficienter, som är lägre än ett visst tröskelvärde, till noll. Koefficienterna används i inverstransformationen som görs för att rekonstruera datamängden. Metoden är alltså, steg för steg att:

1. Transformera signalen till waveletdomänen
2. "Tröskelvärdera", dvs. ta bort alla koefficienter under ett visst värde
3. Inverstransformera signalen tillbaka till den ursprungliga domänen igen

Tekniken är bra att använda för brusreducering då brusreduceringen görs utan att ta bort de skarpa konturerna. Resultatet blir en brusreducerad signal som fortfarande visar viktiga detaljer. Bilden nedan visar ett diagram av en signal före och efter brusreducering.

⁸ Amara Graps "An Introduction to Wavelets" IEEE Computer Society 1995



Den översta rutan visar den ursprungliga signalen är den undre visar signalen efter brusreducering enligt metoden beskriven ovan.⁹

⁹ Image: David Donoho, Stanford University, NMR data: Adrian Maudsley, VA Medical Center, San Francisco

4 Bildkompression

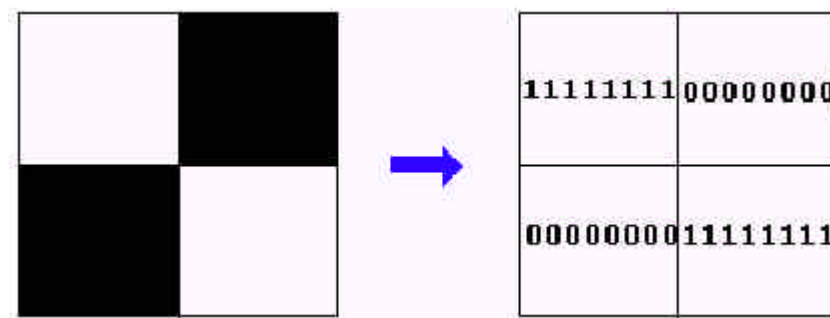
4.1 Inledning, digitala bilder

Som ett användningsområde för wavelets nämns ofta bildkomprimering. I det här avsnittet visas hur bilder representeras digitalt, hur de kan komprimeras med hjälp av wavelets, och vad fördelarna med wavelets är på detta område.

4.2 Hur representeras bilder digitalt?

Digitala bilder kräver normalt relativt stor lagringskapacitet, och bilder i råformat blir snabbt opraktiska att jobba med på grund av sin storlek. För att komma runt detta problem använder man bildkomprimering.

En bild delas upp i ett rutnät, där varje ruta kallas en pixel. I exemplet nedan (figur x) visas en svartvit bild med fyra pixlar. Om gråskalan har 256 toner ($2^8=256$) bestäms varje pixels gråton av ett åtta bitar långt binärt tal. Detta innebär att det skulle krävas $4 \cdot 8 = 16$ bits för att lagra denna bild, vilket inte är så värst mycket kanske. Men så fort bilden blir större, eller upplösningen (antalet pixlar per areaenhet) ökar, växer datamängden som krävs för att representera bilden ganska kraftigt. En bild på 1×1 tum och med en pixelstorlek på $1/100$ tum (upplösning 100dpi) skulle kräva $8 \cdot 100 \cdot 100 = 80.000$ bitar. Och då är det en pytteliten svartvit bild.¹⁰



Att representera färgbilder fungerar på samma sätt som att ha flera svartvita bilder. Om rött grönt och blått används som grundfärger sparar man en "svartvit" bild där gråtonerna går från vitt till rött, en där de går till grönt och en där de går till blått.

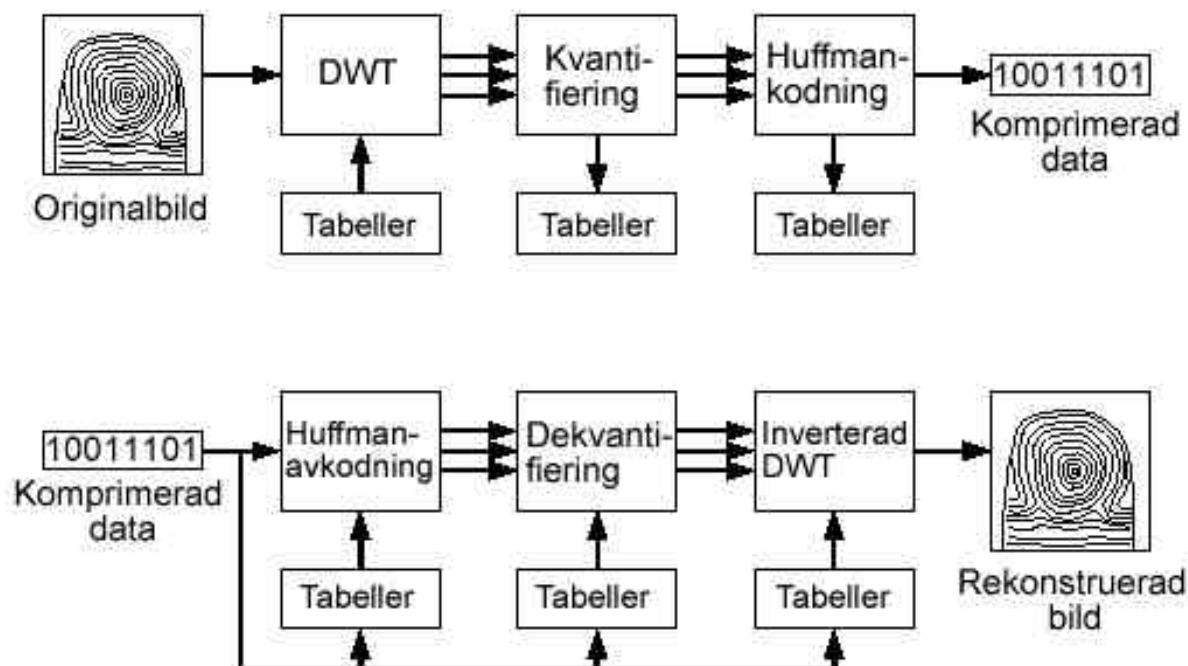
4.3 Hur kan bilder komprimeras?

För att komma runt problemet med de stora datamängder som krävs för att representera bilder använder man alltså bildkomprimering. Att komprimera en bild innebär att man skalar bort redundant information i bilden, för att på så sätt kunna representera den med en mindre mängd data (färre antal bitar).

Det finns en uppsjö olika komprimeringstekniker, med olika för- och nackdelar. När man talar om wavelets i bildkomprimeringssammanhang använder man *transformationskodning*, och det är den teknik som beskrivs här.

¹⁰ "Image Compression Using Wavelets", Karen Lees

Kodning och avkodning följer nedanstående flödesschema



1. *DWT* Genom att tolka originalbilden som en tvådimensionell signal, kan den transformeras med en passande (diskret) wavelettransform.
2. *Kvantifiering* De waveletkoefficienter som producerades i steg ett kvantiseras. Detta innebär att koefficienter under ett visst tröskelvärde tolkas som noll, och alltså utesluts från bildrepresentationen. Det är i kvantifieringssteget som den största delen komprimeringen sker och datamängden minskar.
3. *Huffmankodning* De koefficienter som överlevde kvantifieringen Huffmankodas, för att minimera datamängden ytterligare och för att komprimerade data bara ska kunna tolkas på ett sätt (se även nedan).

I datafilen som representerar den komprimerade bilden sparas även tabeller som krävs för att kunna återskapa bilden.¹¹

4.3.1 DWT och kvantisering i detalj

Det första som händer när en bild ska komprimeras är att den tolkas som en tvådimensionell signal, som sedan transformeras. Koefficienterna i transformationen kan sedan tolkas som en representation av bilden. Anta att vi har en originalbild som representeras av koefficienterna 1, 3, 7, 9, 8, 8, 6, 2. Detta skulle kunna vara en liten och ganska grå bild. Bilden kan komprimeras med en enkel men grov metod genom att medelvärden av de tal som ligger bredvid varandra beräknas. Detta skulle resultera i representationen 2, 8, 8, 4; en kompression av faktor två, eftersom endast hälften så mycket data krävs för att representera bilden.

¹¹ "How Wavelet/Scalar Quantization Works", Christopher M. Brislawn

För att återgå till en okomprimerad bild kan varje siffra repeteras, vilket skulle ge sekvensen 2, 2, 8, 8, 8, 8, 4, 4. Detta skulle, precis som originalet, vara en ganska grå bild, men alla detaljer har försvunnit i och med komprimeringen.

För att möjliggöra en perfekt återgång till originalet, kan information om hur mycket varje siffra avviker från dess motsvarighet i originalbilden läggas till. I exemplet ovan skulle differenserna -1, -1, 0 och 2 ge information om hur mycket varje siffra avviker från originalet ($2+(-1)=1$, $2-(-1)=3$, $8+(-1)=7$, $8-(-1)=9$ osv.; resultatet är som synes originalsekvensen). Genom att separera den grovt komprimerade (lågupplösta) siffersekvensen från differenssekvensen har bilden nu delats upp i flera upplösningar. Först en lågupplöst del och sedan en detaljdelen, som tillsammans med den lågupplösta delen kan återskapa originalet perfekt.

Detta ger ingen direkt komprimering, eftersom all information bara presenteras på ett annorlunda sätt. Däremot syns fördelarna tydligt vid en jämförelse med hur de flesta digitala bilder ser ut. I de flesta fall liknar nämligen närliggande pixlar varandra mycket – nästan alla pixlar på himlen är blå, och nästan alla pixlar på en gräsmatta är gröna. I och med att detaljdelen innehåller just information om hur pixlar skiljer sig från varandra kommer detta att resultera i att detaljdelen innehåller många nollor (eller tal nära noll, som kan avrundas till noll), och dessa tas bort vid kvantiseringen. Ju fler pixlar som liknar varandra, desto fler element i detaljdelen kommer att kvantiseras bort. I en ”enkel” bild kan upp till hälften av informationen (hela detaljdelen) tas bort utan att försämra bildkvalitén nämnvärt. Hela processen kan upprepas tills önskad filstorlek uppnåtts eller tills detaljnivån närmar sig gränsen för vad som är tolererbart.¹²

4.4 Kort om Huffmankodning

Denna typ av kodning kallas *entropikodning*; man representerar vanligt förekommande data med korta koder och mer ovanlig data med längre koder. En viktig egenskap hos huffmankoden är att den bara kan tolkas på ett sätt.

I exemplet nedan visas hur strängen ”Hello, World!” kan Huffmankodas.

Tecken	Antal förekomster	Komprimerad
H	1	0010
E	1	0011
L	3	10
O	2	11
,	1	0000
	1	0001
W	1	0110
R	1	0111
D	1	0100
!	1	0101

Läser vi nu den komprimerade versionen av strängen får vi
0010 0011 10 10 11 0000 0001 0110 11 0111 10 0100 0101

¹² ”Wavelets: Seeing the forest - and the trees”, Dana Mackenzie

Denna sträng kan bara tolkas på ett sätt. Vi ser att strängen representeras av 42 bitar, vilket kan jämföras med originalets storlek på 13 tecken * 8 bitar/tecken = 104 bitar. Dock måste en översättningstabell med information om vilka Huffmankoder som motsvarar vilka originalkoder bifogas datafilen, vilket gör kodning av alltför små datamängder olämplig.¹³

4.5 Varför använda wavelettransformering?

4.5.1 Närmare ett mänskligt öga

En stor fördel med wavelets är att de automatiskt plockar ut samma egenskaper i en bild som det mänskliga ögat. Efter wavelettransformering och kvantisering finns de koefficienter kvar som representerar stora skillnader i bilden, alltså kanter och liknande. Den mänskliga hjärnan fungerar på samma sätt. En tecknare kan t.ex. med några få streck snabbt göra en bra skiss av ett objekt.¹⁴

Om vi jämför en komprimeringsmetod som baseras på cosinustransformen och en som baseras på wavelettransform, kommer vi upptäcka att cosinus-metoden får problem att representera skarpa kanter och liknande, medan det är precis vad wavelet-metoden är bra på. En vanlig fouriertransform (som cosinustransformen är en utveckling av) kräver ju oändligt många komponenter för att representera en spik (från t.ex. ett hörn i bilden) i insignalen perfekt. För att kunna representera spikar drar man helt enkelt en gräns för hur många koefficienter som ska användas, vilket kommer att försämra bildkvaliteten. Hos wavelettransformen finns inte den typen av problem, eftersom det är möjligt att välja en basfunktion som kan transformera kanter och liknande perfekt även med få koefficienter.

4.5.2 Slippa block i komprimerade bilder

Vid hård komprimering av bilder uppträder ofta block, och bilden får sämre kvalitet på grund av att blocken blir för stora och för tydliga.

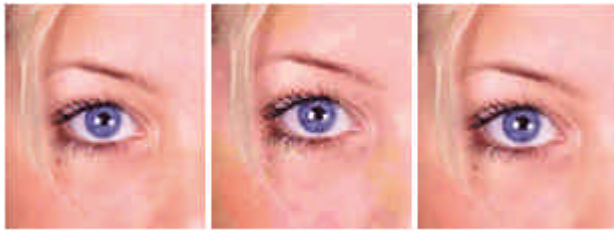
Block uppträder för att komprimeringsmetoden som använts delar upp originalbilden i "underbilder" på 8x8 till 64x64 pixlar. Varje underbild komprimeras sedan för sig. Komprimeringsmetoder som använder denna typ av uppdelning generar ofta bilder med tydliga rutor (block), när komprimeringsgraden ökas.

De metoder som istället använder wavelets delar inte in bilden i underbilder innan transformationen utförs, vilket gör att fenomenet med block inte uppstår i bilden.

¹³ "Huffman-kodning", Bjarni Severin Juliusson

¹⁴ "Wavelets: Seeing the forest - and the trees", Dana Mackenzie

4.6 Exempel



Här visas först originalbilden, sedan en JPEG-version av bilden och sedan en JPEG-2000-version (JPEG-2000 baseras på wavelets). De båda komprimerade bilderna har komprimerats med en faktor 220.

5 Referenser

5.1 I texten använda referenser

1. "Wavelets for Kids", Brani Vidakovic och Peter Mueller
2. "The world According to Wavelets", Barbara Burke Hubbard second edition 1998
- 3-8. "An introduction to wavelets", Amara Graps IEEE Computer Society 1995,
www.amara.com
9. Image: David Donoho, Stanford University, NMR data: Adrian Maudsley, VA Medical Center, San Francisco
10. Karen Lees, "Image Compression Using Wavelets",
<http://www.dcs.shef.ac.uk/teaching/eproj/ug2002/pdf/u9kvl.pdf>
11. Christopher M. Brislawn, "How Wavelet/Scalar Quantization Works",
<http://www.c3.lanl.gov/~brislawn/FBI/OverCompress/HowItWorks/howitworks.html>
12. Dana Mackenzie, "Wavelets: Seeing the forest - and the trees",
<http://www.beyonddiscovery.org/content/view/article.asp?a=1952>
13. Bjarni Severin Juliusson, "Huffman-kodning",
<http://user.it.uu.se/~bjju1185/huffman.html>
14. Dana Mackenzie, "Wavelets: Seeing the forest - and the trees",
<http://www.beyonddiscovery.org/content/view/article.asp?a=1952>

5.2 Övriga referenser

Xavier Tizon, Lecture slides on "Image Coding and Compression",
<http://www.cb.uu.se/~xavier/Teaching/BildanalysVT02/lectures/F15VT02.pdf>

"Wavelets: A Mathematical tool for Signal Analysis", Charles K. Chui, 1997

"Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis", R. Todd Ogden,
Birkhäuser Boston 1997

"Bildkompression med Wavelets", Fredrik Lööv, Gustav Grundin, Torbjörn Skog,
www.nada.kth.se/projects/proj00/bildkompression/

www.sm.luth.se/~grip/Research/TimeFrequency/WaveletIntro/slides.htm

www.sm.luth.se/~Research/publications.html

www.info.umu.se/SAFARI/Projekt/104.sht

www2.math.kth.se/~jockum/smsbibl/offentlig/vsh/waldenabstr.html

www.comsol.se/activities/courses/Wavelets.php