1 Repetitions- och kontrollfrågor. Föreläsning 2

1. Blandat, linjär algebra. Visa att

   (a) inversen till en symmetrisk matris är symmetrisk

   (b) för en godtycklig reell matris $\mathbf{A}$ gäller att produkterna $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ och $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ är symmetriska.

   (c) matrisen $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ är positivt semidefinit. (En matris är positivt semidefinit om $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ för alla $\mathbf{x}$.)

   (d) om $\mathbf{x}_i, i = 1, 2, \ldots, N$ är kolumnerna i matrisen $\mathbf{X}$ så gäller att

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T$$

2. Derivator av funktioner m.a.p. vektorer och matriser kan defieras på många sätt. Ett sätt som är användbart i vissa sammanhang är den sorts derivata som betecknas $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}$, där f är en skalär och $\mathbf{X}$ är en vektor eller matris. Anta att $\mathbf{X}$ är en $m \times n$ matris. Definitionen av $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}$ är då

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{m1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{mn}} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

   dvs de partiella derivatorna sätts in en matris av samma dimension som $\mathbf{X}$. Verifiera att nedanstående deriveringsregler gäller genom att betrakta ett element (i, j) i derivatmatrisen.

   (a) om $f = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = ||\mathbf{x}||^2$, så

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x}$$

   (b) om $f = \mathbf{X}^T\mathbf{X} = tr(\mathbf{X}^T\mathbf{X})$, så

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = 2\mathbf{X}$$

   (c) om $f = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x}$, så

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

   (d) om $f = tr(\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}) + tr(\mathbf{B}^T\mathbf{X})$, så

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\mathbf{X} + \mathbf{B}$$

3. I uppgift 2 (c), Visa dessutom att Hessianen ges av $\mathbf{A}^T + \mathbf{A}$.

4. Den stokastiska variabeln x kan endast anta värdena {1,2,3,7,11} med de respektive sannolikheterna $P = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.25$. Beräkna väntevärdet och variansen för x.

5. Låt x vara en stokastisk variabel som är likformigt fördelad i intervallet $[-1, 1]$. Beräkna väntevärdet och variansen av x.

6. Beräkna väntevärdet och kovariansmatrisen för den tvådimensionella stokastiska variabeln $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ då $\mathbf{x}$ är likformigt fördelad i kvadraten $-1 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 2$.

7. Låt $\mathbf{x}$ vara en vektorvärd stokastisk variabel och låt $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \; \mathbf{a}_1 \; ... \; \mathbf{a}_n)$ vara en känd matris. Väntevärdet av en vektor- eller matrisvärd variabel fås genom att ta väntevärdet av varje ingående komponent. Vidare gäller att väntevärdesoperatorn är linjär. Utnyttja detta för att visa att

   (a) $E[\mathbf{a}_i x_i] = \mathbf{a}_i E[x_i]$.
   (b) $E[\mathbf{A}\mathbf{x}] = \mathbf{A}E[\mathbf{x}]$.
   (c) $E[\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T] = E[\mathbf{x}]^T \mathbf{A}^T$.
   (d) $E[\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T] = \mathbf{A}E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{A}^T$.

8. Låt x och y vara kontinuerliga skalärer och $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är kontinuerliga vektorer. Vidare är a en diskret variabel. Skriv ut produktregeln (med korrekt val av P och p beroende på om faktorn är en sannolikhet eller en täthetsfunktion) i fallen:

   (a) $p(y, x)$
   (b) $p(a, x)$
   (c) $p(a, \mathbf{x}|\mathbf{y})$
   (d) $p(\mathbf{y}, \mathbf{x}|a)$
   (e) $p(\mathbf{x}, a)$ då a och $\mathbf{x}$ är oberoende.
   (f) Låt $dim(\mathbf{x}) = d$. Utveckla m.h.a. produktregeln $p(\mathbf{x})$ i en produkt av d st. faktorer.

9. Härled Bayes sats från produktregeln.

10. Tillämpningar av summaregeln. Summaregeln för uteslutande utsagor (eller händelser), A och B säger att $P(A \text{ eller } B) = P(A) + P(B)$. Vi kan dessutom generalisera denna regel till att $P(A \text{ eller } B|C) = P(A|C) + P(B|C)$. Anta att du har ett MI-problem med två klasser, C_1 och C_2, vilka genererar mönster som består av två binära komponenter, x och y. Vi inför beteckningarna $P_{00} = P(x = 0, y = 0|C_1)$, $P_{01} = P(x = 0, y = 1|C_1)$, $P_{10} = P(x = 1, y = 0|C_1)$ och $P_{11} = P(x = 1, y = 1|C_1)$, samt $Q_{00} = P(x = 0, y = 0|C_2)$, $Q_{01} = P(x = 0, y = 1|C_2)$, $Q_{10} = P(x = 1, y = 0|C_2)$ och $Q_{11} = P(x = 1, y = 1|C_2)$. Uttryck följande sannolikheter i ovanstående P och Q samt *a priori* sannolikheterna $P(C_1)$ och $P(C_2)$:

    (a) $P(C_1|x = 1, y = 0)$

(b) $P(x = 1|C_1)$

(c) $P(C_1|x = 1)$

11. Utnyttja definitionen av väntevärde för att visa att om x och y är oberoende så gäller att $E[xy] = E[x]E[y]$.

12. Om $E[(x - m_x)(y - m_y)] = 0$ för två stokastiska variabler x och y där $m_x = E[x]$ and $m_y = E[y]$, säger vi att x och y är okorrelerade. Visa att om x och y har väntevärde noll och är normalfördelade samt okorrelerade så är de också oberoende.

13. Visa (gärna m.h.a en figur) att x och y är okorrelerade men däremot inte oberoende om den simultana täthetsfunktionen $p(x, y)$ är $\frac{1}{\pi}$ på enhetscirkeln och noll utanför.

14. Visa utgående från definitionen av en kovariansmatris att den är

    (a) Symmetrisk

    (b) Positivt (semi-) definit.