Signaler och System

TENTAMEN I MÖNSTERIGENKÄNNING, 3P

11 DECEMBER 1998, 15.00-21.00

Examinator: Björn Hansson, tel 018 - 471 3071
Hjälpmedel: Mathematical Handbook, Mathematics Handbook (BETA), räknare, utdelad formelsamling

Observera att alla svar måste motiveras! Svar utan motivering ger poängavdrag.
Skriv bara på ena sidan av papperet!

Lycka till!

1. (6p)
   Du skall konstruera en klassificerare som kan skilja på objekt som härrör från två olika klasser som är lika vanliga. För detta ändamål har du tillgång till sensorer som mäter två värden per objekt. Du vet att mätsignalerna är normalfördelade och har följande väntevärden och kovariansmatriser

   $$\mu_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   a) Ange a priori-sannolikheten för respektive klass.
   b) Beräkna diskrimantfunktionen för respektive klass.
   c) Vilken ekvation ges den optimala beslutsytan av? Skriv på formen

   $$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0$$

   Ledning: Vad gäller för diskriminantfunktionerna på denna yta?

   d) Beräkna den optimala beslutsytan och ange den explicit i de ingående variablerna (x_1 och x_2 eller x och y). Vilken geometrisk form har den? Rita figur där bl a nivåytor och beslutsytor ingår.

2. (5p)
   Längs en avlägsen väg har Vägverket satt upp en mätstation som mäter vindhastighet v och vägtemperatur T. Tyvärr har radiolänken blivit feldimensionerad och kan endast överföra hälften av den tänkta datamängden. Istället för att mäta hälften så ofta frågar man om du skulle kunna “sätta ihop någon smart grunka” som kan komprimera datamängden till hälften utan att felet blir alltför stort. Du bestämmer dig för att försöka med PCA och Karhunen-Loeve-transformen. Din kompis Civ har precis gått en kurs i Meteorologi och vet att man kan anta att storheterna är normalfördelade kring ett väntevärde som är dygns- och säsongsberoende. Civ har också skattat normalfördelningarna och kovariansen mellan v och T samt sammanställt en väntevärdestabell åt dig från vägverkets “Meteorologiska data längs avlägsna vägar -98”.

   $$v \sim \mathcal{N}(\mu_v, r_v), \quad r_v = 5, \quad T \sim \mathcal{N}(\mu_T, r_T), \quad r_T = 2$$
   $$\text{Cov}[v, T] = r_{vT}, \quad r_{vT} = -2$$

a) Beräkna K-L-expansionen, d v s visa hur v och T kan uttryckas i egenvektorerna.

b) Bestäm transformationerna för komprimering resp rekonstruktion. Hur stort blir det kvadratiska felet (i medel)?

c) Vid ett tillfälle uppmättes vindstyrkan 3 m/s och temperaturen 3.4 °C. Väntevärdena var vid denna tidpunkt 2.2 m/s resp 3.8 °C. Visa tydligt hur denna mätning komprimeras och rekonstrueras. Hur stort blir rekonstruktionsfelet?

3. (5p)
En praktikant på ett sågverk har råkat blanda ihop de stockar som chefen lagt undan för att göra flaggstänger av (klass c_1) med de vanliga sågstockarna (klass c_2). Med nyvunna kunskaper i riskanalys bestämmer du dig för att hjälpa praktikanten att reda ut misstaget utan att chefen märker något. Genom att utnyttja sågverkets mätutrustning kan ni spara värdefull tid. Uppskattningsvis är antalet sågstockar dubbelt så många jämfört med flaggstångsstockarna. Du plockar ut några stockar på måfå från respektive klass och kör dem genom mätapparaturen. Du får då följande fördelningar

$$f(x|c_1) = \begin{cases} 1+x & , \; -1 \leq x < 0 \\ 1-x & , \; 0 \leq x < 1 \end{cases}, \quad f(x|c_2) = \begin{cases} x & , \; 0 \leq x < 1 \\ 2-x & , \; 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Som du ser är det ett icke försumbart överlapp mellan klasserna, då mätapparaturen ej är tänkt att användas på detta sätt. Du bestämmer dig då för att din klassificeringsmetod ska ha tre handlingar att välja mellan *flaggstång* (α_1), *sågstock* (α_2) och *osäker* (α_3). De stockar som hamnar i den senare gruppen klassas manuellt och felfritt av dig och praktikanten. Efter att noga övervägt situationen kommer du fram till följande kostnadsfunktioner

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= 0, & \lambda_{12} &= 6 \\ \lambda_{21} &= 12, & \lambda_{22} &= 0 \\ \lambda_{31} &= 3, & \lambda_{32} &= 3 \end{aligned}$$

a) Härled de förväntade kostnaderna för respektive handling givet en mätning x.

b) Visa $P(c_1|x)f(x)$ och $P(c_2|x)f(x)$ grafiskt samt markera de optmimala beslutsgränserna (minst förväntad kostnad).

c) Vad blir sannolikheten för att chefen får en sågstock resp sannolikheten att en av flaggstängerna blir sågade? Markera dessa fel i figuren.

4. (5p)
a) Vad är de främsta skillnaderna mellan syntaktisk och statistisk mönsterigenkänning? Beskriv t ex antaganden om hur data genereras och vad som måste vara känt eller estimeras.

b) Vilka krav ställs på särdragsextraktionen för respektive metod? Med föregående uppgift som utgångspunkt, resonera kring komplexiteten i extraktionen för respektive metod. Vilken metod har störst krav på särdragsextraktionen?

5. (5p)
Du skall träna ett litet neuronnät med tre ingångar, en gömd nod och två utgångar. Alla neuroner är olinjära (sigmoid, $\varphi(v) = \frac{1}{1+e^{-v}}$) med utsignaler i intervallet $[0, 1]$. Följande skall gälla för nätets insignaler $\mathbf{x}$ och önskade utsignaler $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Du har slumpat ut nätets initiala viktvärden och erhållit:

$$w_{41} = 0.2, \quad w_{42} = 0.1, \quad w_{43} = 0.3, \quad w_{54} = 0.6, \quad w_{64} = 0.8,$$

a) Rita nätet, numrera neuronerna och markera var respektive vikt kommer in.

b) Ange matematiskt hur vikterna skall uppdateras med 'pattern'- resp 'epoch learning'.

c) Använd steglängden $\eta = 0.5$ och utför **en** uppdatering av vikterna med 'pattern learning'.

6. (4p)
Du skall implementera en OR-grind med ett neuronnät bestående av en neuron med två ingångar. Olinjäriteten är en 'hard limit' och ges av

$$\varphi(v, \theta) = \begin{cases} 0 & , \quad v < \theta \\ 1 & , \quad v \geq \theta \end{cases}$$

a) Definiera problemet och rita en figur över nätet. Markera de olika utsignalerna i mönsterrummet.

b) Motivera varför problemet ej går att lösa utan att använda en 'bias' $\theta \neq 0$ i neuronen.

c) Beräkna den viktvektor $\mathbf{w}$ och den 'bias' θ som löser problemet.

d) Visa hur θ kan inkorporeras i den utökade viktvektorn $\tilde{\mathbf{w}}$.

7. (5p)
Civerth har tenta i Mönsterigenkänning och har klarat alla uppgifter med glans förutom den sista. Med sin intuition vet han vad svaret skall vara, men har inte tillräckliga kunskaper för att visa det. Han vet att han får poängavdrag om han inte ger någon motivering, men han riskerar att avslöja sin okunskap om han ger en felaktig motivering. Han bedömer att utan motivering kommer den stränge examinatorn att ge endast två poäng av fem möjliga.

Med motivering antar han att den betingade poängen han får, givet sin kunskapsnivå IQ, är en binomialfördelad stokastisk variabel X vars fördelning ges av

$$P(X = i|IQ) = \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad E[X|IQ] = np,$$

där $n = 5$ och p beror på IQ.

a) Ange uttrycken för de betingade kostnaderna (förlorade poäng) för de två handlingarna att avstå från resp att ge en motivering till lösningen. **Ledning:** Du kan se problemet som ett problem med sex klasser för poängen $0, 1, \ldots, 5$.

b) Visa att du kan skriva den betingade kostnaden för handling α_i på formen

$$R(\alpha_i|IQ) = k_i x + m_i,$$

där k_i och m_i är handlingsberoende konstanter och x beror på IQ.

c) Ge Civerth en beslutsregel; skall han ge en motivering eller inte?
För rätt svar får du 2 poäng även utan motivering.